**NÚMEROS COMPLEJOS**

Wall. Álgebra II. Cuaderno 2. Pág. 6.

Sabemos que todo número real positivo tiene raíz cuadrada; sabemos también que un número real negativo no tiene, en efecto, en un cuerpo ordenado todo número al cuadrado es positivo.

Cuando los algebristas del siglo XVI acometieron la solución de la ecuación de segundo grado, encontraron perturbados que ciertas expresiones, donde intervenían raíces cuadradas de números negativos, representasen números reales.

no tiene solución en R.

= = = i =

=

4 (-1) + 4 = 0

El Matemático Bombelli fue el primero en no asustarse ante el objeto −1 y lo consideró como un número. Aplicó a este símbolo las operaciones conocidas en **R**, denotando a este objeto imaginario i que, por definición, verifica que i2 = -1, y lo trató como si este símbolo fuese un “número” como los otros.

Más precisamente, compuso éste elemento i con los números de **R** como si operara en un cuerpo, y reemplazando en los cálculos i2 por -1. Actualmente, se dice que este cuerpo es una *extensión* del cuerpo **R** o que es el cuerpo *engendrado* por i sobre **R** y se lo denota **R**(i). (La notación definitiva será **C**).

Por supuesto que la ampliación requerida no se obtiene simplemente agregando i al conjunto de los números reales, ya que el nuevo conjunto debe estar dotado de una estructura algebraica de manera que tenga sentido las operaciones efectuadas en **R**. al fin de construirla adecuadamente, se definen dos operaciones en el conjunto de pares ordenados de números reales, a las que denominaremos genéricamente “suma” y “producto”.

**Definición**

Designemos con C al conjunto **R2**. C = R x R. Un elemento de C será llamado un “número complejo”. Es decir, un número complejo es un par ordenado (a , b) de números reales.

C = {(a , b) / a ∈ R ∧ b ∈ R}

Al primero, a, se le denomina “parte real de (a , b)”

Al segundo, b, se le denomina “parte imaginaria de (a , b)”

α = (a , b) Re(α) = a Im(α) = b

Diremos que dos números complejos son “iguales”, si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria.

(a , b) = (a´ , b´) ⇔ a = a´ y b = b´

z1 = (2 , 3) y z2 = ( a , b) a = 2 y b = 3

C/= conjunto cociente generado por la relación de equivalencia definida en C: la igualdad.

Al conjunto de los números complejos, munidos de estructura aditiva y multiplicativa, se lo denota C.

**Adición en C**

A dos números complejos (a , b) y (c , d) se les asocia otro número complejo, denominado **suma** y definido por:

(a , b) + (c , d) = (a + c , b + d)

(2 , 3) + (1 , 5) = (3 , 8)

( 2 + 3i) + (1 + 5i) = (2 + 1) + (3 +5) i

**Multiplicación en C**

A dos números complejos (a , b) y (c , d) se les asocia otro número complejo, denominado **producto** y definido por:

(a , b) (c , d) = (a c – d b , a d + b c)

Par ordenado: z = ( a, b)

En forma binómica: z = a + bi

(2 + 3i) (1 + 5i) = 2 . 1 + 2 . 5i + 3i . 1 + 3i . 5i = 2 .1 + 3 . 5 i2 + (2 . 5 + 3 . 1)i

= (2 . 1 – 3 . 5) + (2 . 5 + 3 . 1)i

= -13 + 13 i

(x , y ) ( p , q) = (xp – yq , x q +y p)

**Propiedades de la Suma ( C , + )**

Sean α = (a , b) , β = (c , d) y γ = (e , f) números complejos, se verifica:

**Ley de composición interna**: ∀ α ∈ C, ∀ β ∈ C: (α + β) ∈ C

α + β = (a , b) + (c , d)

= (a + c , b + d) como a + c ∈ R y b + d ∈ R → (a + c , b + d) ∈ C

**Asociatividad**: ∀ α ∈ C, ∀ β ∈ C, ∀ γ ∈ C: (α + β) + γ = α + (β + γ)

1er miembro: (α + β) + γ= [(a , b) + (c , d)] + (e , f)

= (a + c , b + d) + (e , f)

= ( (a + c ) + e , (b + d) + f )

2do miembro: α + (β + γ) = (a , b) + [ (c , d) + (e , f) ]

= ( a , b) + (c + e , d +f)

= ( a + (c + e ) , b + (d + f) )

[(a + c) + e; (b + d) + f]] = [a + (c + e); b + (d + f)]

debido a la asociatividad de la suma en **R.**

**por lo tanto, se verifica la asociatividad en C.**

**Conmutatividad**: ∀ α ∈ C, ∀ β ∈ C: α + β = β + α

1er miembro: α + β = (a , b) + (c , d) = (a + c , b + d)

2do miembro: β + α = (c , d ) + (a , b) = ( c + a , d + b)

(a + c; b + d) = (c + a; d + b)

debido a la conmutatividad de la suma en **R.**

**Elemento Neutro**: ∃! e ∈ C, ∀ α ∈ C: α + e = e + α = α

Trabajando por derecha: α + e = α

Por definición de suma:

Por la relación de equivalencia ( la igualdad) definida en C: y

Estas son dos igualdades en R: y

Entonces:

**Elemento Simétrico, Inverso aditivo u Opuesto**: ∀ α ∈ C, ∃α´ ∈ C: α + α´ = α´ + α = e

Trabajando por izquierda: α´ + α = e

(a´ , b´) + (a , b) = (0 , 0)

Por definición de suma en C: (a´ + a , b´+ b) = (0 , 0)

Por igualdad en C: a´ + a = 0 a´ = -a

b´ + b = 0 b´= -b (a´ , b´) = (-a , -b)

En consecuencia ( C , +) tiene la estructura de Grupo Conmutativo.

**Propiedades del Producto ( C – {(0 , 0)} , . )**

Sean α = (a , b) , β = (c , d) y γ = (e , f) números complejos, se verifica:

**Ley de composición interna**: ∀ α ∈ C, ∀ β ∈ C: (α β) ∈ C

α β = (a , b) . (c , d)

= (a c – d b , a d + b c)

como (a c – d b) ∈ R y (a d + b c) ∈ R → (a c – d b , a d + b c) ∈ C

**Asociatividad**: ∀ α ∈ C, ∀ β ∈ C, ∀ γ ∈ C: (α + β) ∈ C: (αβ) γ = α (βγ)

1° miembro: (αβ) γ =

2° miembro: α (βγ) =

Son iguales por la conmutatividad de la suma en R.

**Conmutatividad**: ∀ α ∈ C, ∀ β ∈ C: α β = β α

1° miembro: α β = (a , b) ( c ,d ) = ( ac – bd , ad + bc)

2° miembro: β α = ( c , d) ( a , b) = (ca – db , cb + da)

Son iguales por la conmutatividad de la suma y de la multiplicación en R.

**Elemento Neutro**: ∃ e ∈ C, ∀ α ∈ C: α e = e α = α

Como la multiplicación es conmutativa, trabajemos por derecha: α e = α

(a , b) = ( a , b)

Por definición de multiplicación en C: = ( a , b)

Por definición de igualdad de complejos:

Para resolver este sistema de 2 x 2, aplicamos, por ejemplo, el método de sustitución:

Como porque ( C – {(0 , 0)} , . ),

**Elemento Simétrico, Inverso aditivo u Opuesto**: ∀ α ∈ C, ∃α´ ∈ C: α α´ = α´ α = e

Como la multiplicación es conmutativa, trabajemos por derecha: α α´ = e

(a , b) (a´, b´) = ( 1 , 0)

Por definición de multiplicación en C: (a a´- b b´ , a b´ + b a´) = ( 1, 0)

Por igualdad en C: a a´- b b´ = 1

a b´ + b a´ = 0

Resolvemos el sistema de 2 x 2 usando, por ejemplo, determinantes:

Entonces

z= (2 , 3) z´ = para verificar: (2 , 3)

En consecuencia ( C\* , .) tiene la estructura de GRUPO ABELIANO.

**Doble distributividad del producto respecto de la suma en C**

Sean α = (a , b) , β = (c , d) y γ = (e , f) números complejos, se verifica:

∀ α ∈ C, ∀ β ∈ C, ∀ γ ∈ C: α (β + γ) = α β + α γ

(β + γ) α = β α + γ α

Verifiquemos la distributividad por derecha del producto respecto a la suma en C:

1° miembro: (β + γ) α = [(c , d) + (e , f) ] (a , b) = ( c + e , d + f) (a , b) = ((c+e) a – (d + f) b , (c+e) b + (d+f) a) = ( ca + ea –db – fb , cb + eb + da + fa)

2° miembro: β α + γ α= (c , d) (a , b) + (e , f) ( a , b) = (ca – db , cb + da) + (ea – fb , eb + fa) = ((ca – db) + (ea – fb) , (cb + da) + (eb + fa)) = ( ca – db + ea –fb , cb + da + eb + fa)

Son iguales por la conmutatividad de la suma en R.

En resumen, como se verifica que:

( C , +) tiene la estructura de GRUPO ABELIANO.

( C\* , .) tiene la estructura de GRUPO ABELIANO.

(C , + , . ) tienen estructura de CUERPO CONMUTATIVO.

Basado en Rojo, Álgebra I, pág. 341-

**C no está ordenado**

Una diferencia esencial que presenta el cuerpo de los números Complejos con relación al cuerpo de los números Reales consiste en que no es ordenado.

En efecto, si fuera ordenado, como i ≠ 0 , entonces i > 0 o i < 0

* Consideremos que i > 0 i i > i 0

Lo que es un absurdo.

* Consideremos que i < 0, como, si en una desigualdad, se multiplica miembro a miembro por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia:

i i > i 0

Lo que es un absurdo.

Queda justificado que no hay orden en C.

**Isomorfismo de los Complejos Reales en los Reales**

¿El cuerpo C de los números complejos cumple con el objetivo de construir una extensión de R que contenga una raíz cuadrada de -1, ? Hablando estrictamente, **no**. ¿R ⊆ C?[[1]](#footnote-1)

Ya que R ni siquiera está contenido en C, pero se logra nuestro objetivo identificando adecuadamente a R con cierto subconjunto de C.

Consideremos un conjunto:

El conjunto de los números complejos de parte imaginaria nula.

Ahora, consideremos la función:

( a , 0) → f[(a , 0)] = a

Esta es una función que asigna a cada complejo real su primera componente.



La función f así definida es biyectiva y además, es un morfismo[[2]](#footnote-2) de en R, respecto de la suma y del producto. En efecto, es un morfismo porque:

Sean z = (a , 0) y z´ = (a´ , 0)

f (z + z´) = f [(a , 0) + (a´ , 0)] = f [(a + a´ , 0)] = a + a´ = f [(a , 0)] + f [(a´ , 0)] = f (z) + f (z´)

f (z . z´) = f [(a , 0) . (a´ , 0)] = f[ (a . a´- 0 . 0 , a . 0 + 0 . a´)] = f [(a . a´ , 0)] = a . a´ = f [(a , 0)] . f [(a´ , 0)] = f (z) . f (z´)

(la demostración de que esta función es biyectiva queda a cargo del lector)

Entonces, f es un isomorfismo de en R, respecto de la suma y del producto, es decir, y R **son conjuntos indistinguibles desde el punto de vista algebraico**.

El isomorfismo permite identificar cada número complejo real con el número real correspondiente, es decir, a (a , 0) con a.

A partir de esto, como ⊆ C y y R son conjuntos indistinguibles desde el punto de vista algebraico, es válida la inclusión R ⊆ C , a través de la identificación:

**Forma binómica de un Número Complejo**

**Unidad Imaginara**. El número complejo imaginario de primera componente igual a 0 y de segunda componente igual a 1, se llama unidad imaginaria y se denota por:

i = (0 , 1)

La multiplicación de un **número real** por **la unidad imaginaria** permuta las componentes de aquel, es decir, lo transforma en un **complejo imaginario**. En efecto:

b i = (b , 0) i = ( b , 0 ) (0 , 1) = ( b 0 – 0 . 1 , b 1 + 0 . 0) = (0 , b)

3 i R x C → C

Es un producto externo. Es una ley de composición externa.

Y por el isomorfismo de los complejos reales con los reales:

bi = (0 , b)

Todo número complejo bi, con b ∈ R, se denomina imaginario puro.

De acuerdo a todo lo hasta aquí dicho, ∀ z = (a , b) ∈ C

z = (a , b) = (a , 0) + (0 , b) = a + bi

(a , b) es la representación como par ordenado del número complejo.

a + bi es la representación binómica del número complejo.

**Potencias sucesivas de la unidad imaginaria**

Sabemos que y

.

.

.

Con n = 0, 1, 2 , 3 y k ∈ Z. donde k es el cociente de la división euclidiana del exponente de i por el divisor 4, y n es el resto de dicha división.

i13 = i1 = i 13 / 4 = cociente = 3 y resto = 1 13 = 3. 4 + 1

i28 = i0 = 1 28/4 = 7 cociente = 7 resto= 0 28 = 4 . 7 + 0

**Conjugación en C**

**Definición**

Sea z = a + bi, conjugado de z es el número complejo = a – bi.

Dos complejos son conjugados si y sólo si tienen la misma parte real y sus partes imaginarias con números opuestos.



Propiedades: Sea z = a + b i

1)

2) z + = 2 a

3) z = (a + bi) (a - bi) =

4) z ∈ R ⇔ z =

5)

z → f(z) = es un automorfismo en C : = + y =

De estas propiedades resulta que, en todo cálculo sobre números complejos, si se reemplazan los números que intervienen por sus conjugados, el resultado se reemplaza por su conjugado.

Resta de complejos en coordenadas rectangulares: = (a + bi) – (c + di) =

= a + (-c) + (b – d) i

∀ z ∈ C\* : z = (a , b) se tiene que

Demostración: z = (a , b)

Como consecuencia, se tiene que:

Basado en Rojo, Álgebra I, pág. 351.

Sánchez, C (2014) Lecciones de Álgebra. Dpto de Matemática. FCEyN. UBA. Pág. 322.

**MÓDULO de un Número Complejo**

Sea z = a + bi un número complejo, se denomina módulo de un número complejo a la raíz cuadrada no negativa de la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria, .

|  |  |
| --- | --- |
|  | z = a + bi |

**Propiedades del módulo**

**1)** El módulo de todo número complejo es mayor o igual que su parte real.

z = a + bi

**2)** El producto de cualquier complejo por su conjugado es igual al cuadrado del módulo.

(a + b i) (a - bi) =

**3)** El módulo del producto de dos números complejos es igual al producto de los módulos.

= z → morfismo multiplicativo

Sabemos que y

=

**4)** El módulo de la suma de números complejos es menor o igual que la suma de los módulos.

≤

Partiendo de:

z → morfismo aditivo

Teniendo en cuenta que:

(a + b i) (c - di) + (c + d i) (a - bi) = ac – ~~adi~~ +~~bci~~ + bd + ca + ~~adi~~ – ~~cbi~~ +bd

= 2 (ac + bd)

= 2 Re()

Como la parte real es menor o igual que el módulo de cualquier número complejo:

z = a + b i Re(z ) = a ≤

≤

**5)** El módulo de una potencia de exponente es igual a la potencia del módulo.

Se debería saber resolver las operaciones: suma, resta, producto, cociente, potencia.

**Raíz Cuadrada de un número complejo en coordenadas rectangulares**

Se α = a + bi un número complejo no nulo. Entonces, α admite dos raíces cuadradas en C.

La ecuación , z y α son números complejos, se denomina ecuación binomia de segundo grado, donde α es conocido en C y la incógnita es z.

Llamando z = x + y i, α = a + bi; con x, y, a, b son números reales.

La ecuación binómica se escribe:

(1)

Aplicando el módulo a ambos miembros:

Por el cuadrado del módulo:

(2)

Desarrollando (1):

De donde

Sumando miembro a miembro (2) y (3):

2 + a →

Restando miembro a miembro (2) y (3):

2 - a →

Los radicandos en ambos casos son positivos, porque .

Según la condición dada por (4):

Si b > 0 ⇒ x e y se eligen del mismo signo:

Si b < 0 ⇒ x e y se eligen de signos distintos:

Cálculos Auxiliares

a = Re( = 3 Im() = b = -4 < 0 → x e y tienen signos ≠

=± 2 z = (±2 , ±1)

= ±1

(2 , -1) 2 – i S = { 2 – i , 2 + i }

(-2 , 1) 2 + i

**EL PLANO COMPLEJO**

**Representación gráfica**

Puesto que los números complejos están definidos como pares ordenados de números reales, resulta natural representarlos en el plano, asignando a cada z = a + b i el punto de coordenadas cartesianas (a; b). Alternativamente, también pensaremos a z como un segmento dirigido o vector, que indicaremos por ~z, con origen en el punto (0; 0) y extremo en (a; b). Es claro entonces que a cada número complejo le corresponde un punto del plano y que cada punto del plano representa un número complejo. Este modelo geométrico de C será llamado el plano complejo.



El plano complejo

 

Representación de la suma y la resta en el plano complejo Módulo de un número complejo

Ahora veremos un par de ejemplos, en los que ofreceremos descripciones geométricas de ciertos subconjuntos del plano complejo.

Caractericemos el conjunto:

Lo haremos de dos maneras. En la primera, puramente algebraica, escribimos z = a + b i y planteamos la condición (los módulos se elevan al cuadrado), resultando que:

| (a + bi) + 1 – i | = | (a + bi) - 1 - 3 i |

| (a + 1) + (b -1) i | = | (a – 1) + (b – 3) i |

=

Si ahora desarrollamos los cuadrados y simplificamos obtenemos:

2a - 2b + 1 = - 2a - 6b + 9

4a + 4b = 8

o equivalentemente,

a + b = 2

x + y = 2

y = -x + 2

como se comprueba fácilmente. Luego L = { z ∈ C : Re(z) + Im(z) = 2 } es una recta del plano complejo.

Alternativamente, podemos proceder de manera geométrica. Para ello, observemos que la condición que define a L puede expresarse en la forma, la distancia de z a (-1 + i) es igual a la distancia entre z y 1 + 3i:

d (z ; -1 + i ) = d (z ; 1 + 3 i)

Por lo tanto (usando las notaciones u = -1+i y v = 1+3i), resulta que L consiste de los puntos del plano que equidistan de u y v. Como sabemos de la geometría elemental, dicho conjunto de puntos es la recta mediatriz del segmento que une los puntos u y v, esto es, la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. Para hallar su ecuación, notemos que y = x+2 es la ecuación de la recta S que pasa por u y v (las componentes de ambos la satisfacen) y que 2i es el punto medio del segmento, ya que pertenece a S y equidista de u y v. En conclusión, L tiene pendiente -1 y ordenada al origen 2, o sea:

L = { z ∈ C : Im(z) = - Re(z) + 2} = { z ∈ C : Re(z) + Im(z) = 2}

Naturalmente, arribamos al mismo resultado. Ambas formas de caracterizar L son válidas, aunque con la segunda descubrimos rápidamente que tipo de conjunto del plano es L.



Consideremos el subconjunto de C:

A = { z ∈ C : 1 < | z - 2i | < 3 }

Puesto que la distancia entre dos puntos es el módulo de su diferencia, resulta que A consiste de los puntos cuya distancia a 2i es mayor que 1 y menor que 3. Por lo tanto, A es la corona circular determinada por las circunferencias de centro 2i y radios 1 y 3, respectivamente.

1 < | z - 2i | < 3

Siendo z = x + y i,

1 < | - 2i | < 3

1 < | | < 3

1 < < 3

Elevando al cuadrado miembro a miembro de la anterior desigualdad:

1 < < 9

Lo que quiere decir que se tiene, como = es una circunferencia con centro en C(0 , 2) y radio r.

Entonces:

< 9 puntos del plano que están a una distancia menor de 3 unidades del punto C(0 , 2).

> 1 puntos del plano que están a una distancia mayor de 1 unidad del punto C(0 , 2).

Lo que da por resultado la siguiente corona circular:



1. A ⊆ B ⇔ ∀ x : x ∈ A ⇒ x ∈ B C = R x R A ={1 , 2} A x A = {(1 , 1) , (2 ,2) , (1 , 2) , (2 , 1)} ¿A ⊆ AxA? [↑](#footnote-ref-1)
2. Sean A y B dos conjuntos no vacíos dotados de dos leyes de composición interna (A , \*) y (B , ⊥), y f una función de A en B. la función f es un morfismo de A en B, si y sólo sí: f (a \* b) = f(a) ⊥ f(b). [↑](#footnote-ref-2)